

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

4 de Abril de 2005

Semana 3

1. Determine os valores dos seguintes integrais:

- a) $\int_C |z| dz$ em que C é o semicírculo percorrido em sentido directo unindo $-2i$ a $2i$.
- b) $\int_C z \cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi .

Resolução:

(a) Uma parametrização possível para C é

$$z(\theta) = 2e^{i\theta} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

pelo que

$$\int_C |z| dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |2e^{i\theta}| 2ie^{i\theta} d\theta = 8i$$

(b) Uma parametrização possível para C é

$$z(t) = it \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

pelo que

$$\int_C z \cos z^2 dz = \int_0^\pi it \cos(-t^2) i dt = -\frac{\sin(\pi^2)}{2}$$

Note-se que atendendo ao facto da função $z \cos z^2$ ser analítica na região interior a C (de facto é uma função inteira), podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para concluir que

$$\int_C z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{\sin(\pi^2)}{2}$$

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

- a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.
- b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

Resolução:

Observe-se primeiro que $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$. Com $t \in [0, 1]$, parametrizações possíveis são: $\gamma_1(t) = (1 - t)0 + t(1 + i) = t + ti$ e $\gamma_2(t) = t + t^2i$.

a)

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_0^1 e^{t(1+i)}(1 + i) dt = e^{t(1+i)} \Big|_0^1 = e^{1+i} - 1$$

e

$$\int_{\gamma_2} e^z dz = \int_0^1 e^{t+it^2}(1 + 2ti) dt = e^{t+it^2} \Big|_0^1 = e^{1+i} - 1$$

b)

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (t - ti)^2(1 + i) dt = (1 - i)^2(1 + i) \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1 - i)$$

e

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (t - t^2i)^2(1 + 2ti) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4 - 2it^5) dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$$

c) A função $z \mapsto e^z$ é holomorfa em \mathbb{C} e portanto o integral é independente do caminho (consequência do Teorema de Cauchy). Pode-se notar ainda que nestas condições é válido o Teorema Fundamental e portanto

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = e^z \Big|_0^{1+i} = e^{1+i} - 1$$

Por outro lado, a função $f(z) = \bar{z}^2$ não é holomorfa em nenhum ponto de \mathbb{C} (porquê?), e portanto os integrais sobre caminhos homotópicos podem depender dos caminhos, o que sucede no presente exercício.

3. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1 + i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \text{ e } 0 < \arg z < 2\pi$$

Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

Resolução:

Começamos por notar que a função integranda não é analítica no semi-eixo real negativo. Uma parametrização possível para a curva será $z(t) = e^{it}$ com $0 < t < 2\pi$. Assim

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \exp[(-1 + i)\log z(t)] z'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \exp[(-1 + i)it] i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i \exp[(-1 + i)it + it] dt \\ &= \int_0^{2\pi} i e^{-t} dt = (-i e^{-t}) \Big|_0^{2\pi} = i(1 - e^{-2\pi}) \end{aligned}$$

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

Resolução:

Utilizando a parametrização sugerida

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{2R^2 e^{12t} - 1}{R^4 e^{i4t} + 5R^2 e^{i2t} + 4} Rie^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{|2R^2 e^{12t} - 1|}{|R^4 e^{i4t} + 5R^2 e^{i2t} + 4|} |Rie^{it}| dt \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{|2R^2 e^{12t}| + |-1|}{|(R^2 e^{i2t} - 1)(R^2 e^{i2t} - 4)|} R dt \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{(2R^2 + 1)R}{(|R^2 e^{i2t}| - |-1|)(|R^2 e^{i2t}| - |-4|)} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(2R^2 + 1)R}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} dt = \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \end{aligned}$$

como se queria mostrar.

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \oint_{\Gamma} z^3 \cosh z \, dz & \text{(b)} \quad \oint_{\Gamma} \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}} \, dz & \text{(c)} \quad \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + \pi^2} \, dz \\ \text{(d)} \quad \oint_{\Gamma} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} \, dz & \text{(e)} \quad \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z - 2\pi i)^3} & \text{(f)} \quad \oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}} \, dz \end{array}$$

Resolução:

(a) Dado que $z^3 \cosh z$ é uma função inteira e Γ é uma curva fechada, regular e simples, podemos usar o Teorema de Cauchy e concluir que

$$\oint_{\Gamma} z^3 \cosh z \, dz = 0$$

(b) A função $\frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}}$ é o quociente de funções inteiras, pelo que será analítica no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z : z - \frac{i}{2} = 0\}$, ou seja em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}\}$. Resta-nos averiguar, qual a posição do ponto $\frac{i}{2}$ relativamente à elipse. Atendendo a que

$$\left| \frac{i}{2} - i\pi \right| + \left| \frac{i}{2} - 2\pi i \right| = 3\pi - 1 < \frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$$

tem-se que $\frac{i}{2}$ pertence à região interior a Γ . Dado que ze^{-z} é uma função inteira e Γ é uma curva fechada, regular e simples, aplicando a fórmula integral de Cauchy obtemos

$$\oint_{\Gamma} \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}} dz = 2\pi i z e^{-z} \Big|_{z=i/2} = -\pi e^{-i/2}$$

(c) A função $\frac{1}{z^2 + \pi^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-\pi i, \pi i\}$, e atendendo a que

$$|\pi i - \pi i| + |\pi i - 2\pi i| = \pi < 7\pi/2 \quad \text{e} \quad |-\pi i - \pi i| + |-\pi i - 2\pi i| = 5\pi > 7\pi/2$$

tem-se que $-\pi i$ não pertence à região interior a Γ e πi pertence à região interior a Γ . Escrevendo

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + \pi^2} dz = \oint_{\Gamma} \frac{\frac{1}{z + \pi i}}{z - \pi i} dz$$

e atendendo a que a função $\frac{1}{z + \pi i}$ é analítica na região interior a Γ , tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + \pi^2} dz = 2\pi i \frac{1}{z + \pi i} \Big|_{z=i\pi} = 1$$

(d) A função $\frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, \frac{\pi i}{2}\}$, e atendendo a que

$$|0 - \pi i| + |0 - 2\pi i| = 3\pi < 7\pi/2 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\pi i}{2} - \pi i\right| + \left|\frac{\pi i}{2} - 2\pi i\right| = 2\pi < 7\pi/2$$

tem-se que tanto 0 como $\frac{\pi i}{2}$ pertencem à região interior a Γ . Podemos escrever

$$\oint_{\Gamma} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz$$

em que (por exemplo)

$$\Gamma_1 = \{z : |z| < \frac{1}{2}\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \{z : |z - \frac{\pi i}{2}| < \frac{1}{2}\}$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz \\ &= \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{5z - \pi i}{2z - \pi i}}{z^2} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z - \pi i}{z^2}}{2z - \pi i} dz \end{aligned}$$

Dado que a função $\frac{5z - \pi i}{2z - \pi i}$ é analítica na região interior a Γ_1 , tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n = 2$)

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{5z - \pi i}{2z - \pi i}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{5z - \pi i}{2z - \pi i} \right)' \Big|_{z=0} = -6$$

Por outro lado, dado que a função $\frac{5z - \pi i}{z^2}$ é analítica na região interior a Γ_2 , tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z - \pi i}{z^2}}{2z - \pi i} dz = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{5z - \pi i}{z^2}}{z - \frac{\pi i}{2}} dz = \pi i \frac{5z - \pi i}{z^2} \Big|_{z=\pi i/2} = 6$$

Finalmente

$$\oint_{\Gamma} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz = -6 + 6 = 0$$

(e) Seguindo os passos da alínea anterior, a função $\frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\pi i\}$, e é fácil de verificar que tanto 0 como $2\pi i$ pertencem à região interior a Γ . Podemos escrever

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz$$

em que (por exemplo)

$$\Gamma_1 = \{z : |z| < \frac{1}{2}\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \{z : |z - 2\pi i| < \frac{1}{2}\}$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz \\ &= \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2\pi i)^3}}{z^2} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{(z - 2\pi i)^3} dz \end{aligned}$$

Dado que a função $\frac{1}{(z-2\pi i)^3}$ é analítica na região interior a Γ_1 , tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n = 2$)

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2\pi i)^3}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(z - 2\pi i)^3} \right)' \Big|_{z=0} = -\frac{3i}{8\pi^3}$$

Por outro lado, dado que a função $\frac{1}{z^2}$ é analítica na região interior a Γ_2 , tem-se, por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas ($n = 3$)

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{(z - 2\pi i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2} \left(\frac{1}{z^2} \right)'' \Big|_{z=2\pi i} = \frac{3i}{8\pi^3}$$

Finalmente

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2(z - 2\pi i)^3} dz = -\frac{3i}{8\pi^3} + \frac{3i}{8\pi^3} = 0$$

(f) A função $\frac{\cos z}{(z - i)^{11}}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ e é fácil de verificar que i pertence à região interior a Γ . Pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas ($n = 10$)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i)^{11}} dz = 2\pi i \frac{1}{10!} (\cos z)^{(10)} \Big|_{z=i} = -\frac{2}{10!} \pi i \cos i$$

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i(x^2 - y^2 + 2xy - 2x).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Começemos por analisar o domínio de analiticidade da função integranda $\frac{f(z)}{(z-2)^2}$, pelo que necessitamos de saber quais os pontos de \mathbb{C} onde a função f admite derivada. Sendo

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2x$$

tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y - 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$$

É óbvio que todas estas funções são contínuas em \mathbb{R}^2 e que as condições de Cauchy Riemann se verificam para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podemos então concluir que f é uma função inteira, pelo que $\frac{f(z)}{(z-2)^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Dado que C é uma curva fechada, simples e regular, e que 2 pertence à sua região interior, por aplicação da fórmula integral de Cauchy para as derivadas ($n = 1$), concluímos

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i f'(2) = 2\pi i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(2, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(2, 0) \right) = 2\pi i(4 + 2i)$$

7. *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em \mathbb{C} .

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

Resolução:

Seguindo a sugestão, vamos demonstrar que nas condições dadas $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto f ser inteira, podemos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy para concluir que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

para qualquer curva de Jordan C percorrida uma vez no sentido directo e tal que z pertença à sua região interior. Em particular

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

isto é, sendo C a circunferência de raio R centrada em z . Por outro lado atendendo a que f é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Tem-se então que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| |dw| \leq \frac{M}{2\pi} \oint_{|w-z|=R} \frac{1}{R^2} |dw| = \frac{M2\pi R}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}$$

Ou seja, dado qualquer número complexo z

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad , \quad \forall R \in \mathbb{R}^+$$

Visto R ser arbitrário, quando $R \rightarrow \infty$

$$|f'(z)| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0$$

Seja $f = u + iv$. Como $f'(z) = 0$, resulta do teorema de Cauchy-Riemann que todas as derivadas parciais de u e v são nulas para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Desta forma, f é constante em \mathbb{C} .